Quantitative Modellierung der Lichtkurve eines Systems Bedeckungsveränderlicher

R. Brinks

23. September 2002

Zusammenfassung

In diesem Aufsatz wird die die quantitative Modellierung der Lichtkurve eines Paars von Bedeckungsveränderlichen beschrieben. Die resultierende Lichtkurve ist abhängig vom Abstand der Komponenten (Trennung) und von der Neigung der Sichtlinie des Beobachters gegen die Bahnebene (Inklination).

1 Bedeckungsveränderliche

Es soll die Lichtkurve eines physischen Doppelsterns berechnet werden, bei dem sich die Komponenten gegenseitig bedecken und damit die Gesamthelligkeit des Systems periodischen Schwankungen unterworfen ist. Das Sternenpaar dreht sich unter dem Einfluß der gegenseitigen Anziehung um seinen gemeinsamen Schwerpunkt. Ist dann die Bahnebene nicht oder nur wenig gegen die Sichtlinie des Beobachters von der Erde geneigt, treten gegenseitige Bedeckungen auf, die sich als Helligkeitsschwankungen photometrisch bemerkbar machen können. Man spricht von sogenannten Bedeckungsveränderlichen.

Der Einfachheit halber stellen wir uns für die Simulation vor, dass die beiden Sterne einen genügend großen Abstand besitzen, so dass sie a) getrennt erscheinen b) nicht verformt werden und c) es nicht zu einem Materietransfer kommt. Wir simulieren also sogenannte Algolsterne ohne Massenaustausch[1]. Die Sterne sollen Hauptreihensterne sein, wobei die Hauptkomponente bzw. der Begleiter die Masse $m_1 = 2\ M_\odot$ bzw. $m_2 = 1\ M_\odot$ haben soll. Entsprechend der Masse-Leuchtkraft-Beziehung $L \sim m^{3.5}$ erhält man für die Leuchtkraft $L_1 = 11.3\ L_\odot$ bzw. $L_2 = 1.0\ L_\odot$. Analog erhält man wegen $r \sim m^{0.6}$ für die Radien $r_1 = 1.52\ R_\odot$ bzw. $r_2 = 1.0\ R_\odot$. Zusammenfassend ergibt sich für die wesentlichen Zustandsgrößen:

	Masse $m/M_\odot$	Radius $r/R_\odot$	Leuchtkraft $L/L_\odot$
Hauptstern	2	1.52	11.3
Begleiter	1	1.0	1.0

Wir wollen im folgenden für den oben geschilderten Fall die resultierende Lichtkurve berechnen. Dazu gehen wir in zwei Schritten vor:

1. Durch geometrische Überlegungen (Winkelfunktionen, Cosinussatz, Rechnen mit Kreisflächen) bestimmen wir die überlappende Fläche von zwei Kreisen in der Ebene in Abhängigkeit von ihren Mittelpunkten und Radien.

2. Wir bestimmen die Lage der an die scheinbare Himmelkugel projizierten Sternmittelpunkte.

[1] Die Zahlenverhältnisse sind hier so gewählt, dass keine Komponente an ihr Roche-Volumen heran kommt.

Da die kugelförmigen Sterne durch die Projektion an den Himmel als Kreisscheiben erscheinen, erlauben beide Schritte zusammen dann die analytische Bestimmung der Lichtkurve.

2 Überlappende Fläche

Gegeben seien zwei Kreisscheiben K_1 bzw. K_2 in der Ebene mit Mittelpunkten (x_1, y_1) bzw. (x_2, y_2) und Radien r_1 bzw. r_2. Es gelte wie oben $r_1 \geq r_2$ und d sei der Abstand der beiden Mittelpunkte:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Ist $d \geq r_1 + r_2$, so ist der überlappende Flächeninhalt $F_o = 0$. Für $d \leq r_1 - r_2$, ist F_o gleich dem Flächeninhalt der kleineren Kreisscheibe, $F_o = \pi r_2^2$. Ist $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$, unterscheiden wir zwei Fälle:

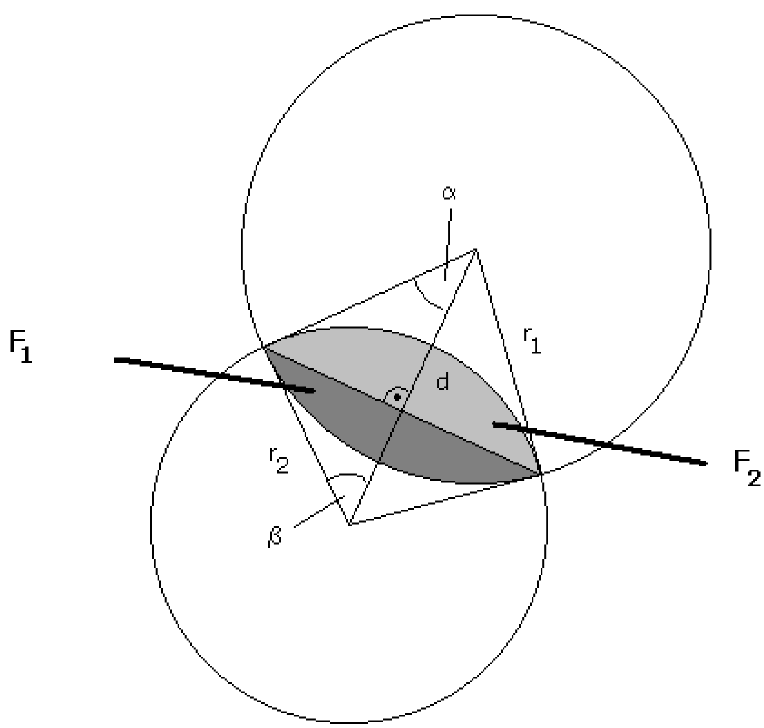

Abbildung 1: Überlappende Fläche für den Fall $d^2 \geq r_1^2 - r_2^2$.

1. Fall: $d^2 \geq r_1^2 - r_2^2$. Nach Anwendung der Winkelfunktionen und der Formel für den Flächeninhalt für Kreisausschnitte erhält man mit den Bezeichnungen aus Abb. 1: $F_o = F_1 + F_2 = \frac{\alpha}{180}\pi r_1^2 + \frac{\beta}{180}\pi r_2^2 - dr_1 \sin\alpha$. Man erhält α und β über den Kosinussatz zu

$$\alpha = \arccos\left(\frac{r_1^2 + d^2 - r_2^2}{2dr_1}\right)$$

und

$$\beta = \arccos\left(\frac{r_2^2 + d^2 - r_1^2}{2dr_2}\right).$$

2. Fall: $d^2 \leq r_1^2 - r_2^2$. Mit den Bezeichnungen aus Abb. 2 erhält man $F_o = F_1 + F_2 + F_\triangle$ und erhält das gleiche Resultat wie im ersten Fall.

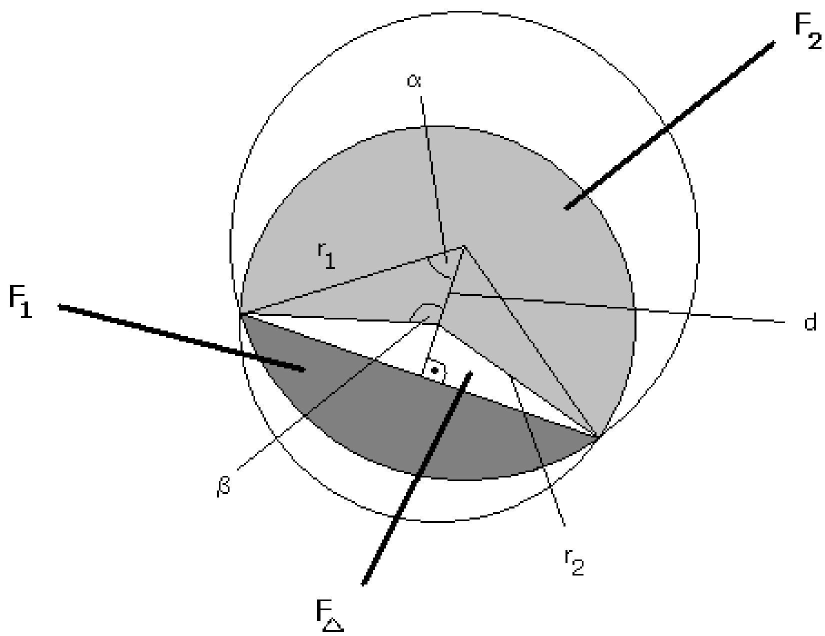

Abbildung 2: Überlappende Fläche für den Fall $d^2 \leq r_1^2 - r_2^2$.

Man beachte in den Abb. 1 und 2, dass α bzw. β immer an den Mittelpunkten von K_1 bzw. K_2 anliegen. F_1 bzw. F_2 ist in beiden Abbildungen die dunkel- bzw. hellgraue Fläche. In Abb. 2 ist $F_\triangle$ der Flächeninhalt des gesamten weißen Dreiecks im Schnittgebiet.

3 Koordinaten der projizierten Sternmittelpunkte

Stellen wir uns das System zunächst in der Draufsicht ($i = 90°$) [2] wie in Abb. 3 vor.

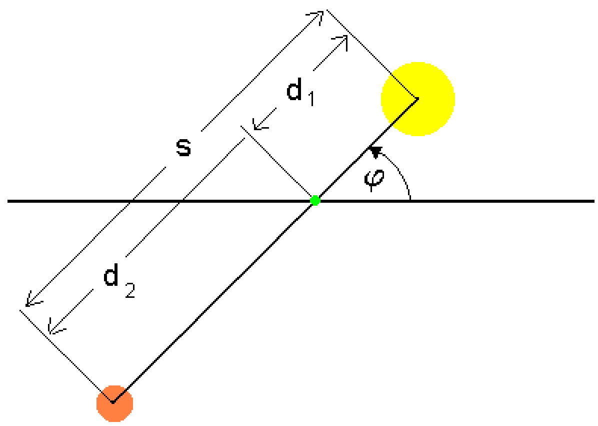

Abbildung 3: Draufsicht (face-on) auf das Sternenpaar.

Dann gilt mit den dortigen Bezeichnungen wegen $m_1\ d_1 = m_2\ d_2$ (Schwerpunktsatz) und $d_1 + d_2 = s$:

$$d_j = \frac{m_j}{m_1 + m_2} s,\ \ j = 1, 2.$$

Für die Mittelpunktskoordinaten $(\hat{x}_j, \hat{y}_j)$ der Kreisscheiben $K_j,\ j = 1, 2$, ist im Schwerpunktsystem

$$\begin{aligned}
\hat{x}_1 &= d_1 \cos(\varphi), \\
\hat{y}_1 &= d_1 \sin(\varphi), \\
\hat{x}_2 &= -d_2 \cos(\varphi), \\
\hat{y}_2 &= -d_2 \sin(\varphi),
\end{aligned}$$

wobei φ der Phasenwinkel ist, der den Winkel zwischen x-Achse und d_1 im mathematisch positiven Sinn misst.

Nun kann man i.a. nicht annehmen, dass die Inklination $i = 90°$ ist. Für einen Beobachter, der unter einem Winkel i in das Schwerpunktsystem schaut, verkürzen sich die Abstände in y-Richtung durch den Faktor $\cos(90° - i) = \sin i$. Man kann sich das anhand Abb. 3 klarmachen, indem man sich vorstellt, dass die Bahnebene die Papierebene ist. Die Draufsicht $i = 90°$ entspricht dann einem Blick genau von oben auf das Papier. Längen in y-Richtung erscheinen ungestaucht so wie sie sind. Lehnt man sich zurück, so schaut man von weiter hinten auf das Papier und Längen in y-Richtung werden gestaucht. Im Extremfall $i = 0°$ blickt man genau die Kante des Blattes: Längen in y-Richtung werden zu 0. Man erhält also für die scheinbaren Mittelpunkte $(x_j, y_j),\ j = 1, 2$:

$$\begin{aligned}
x_1 &= d_1 \cos(\varphi), \\
y_1 &= d_1 \sin(\varphi) \sin(i), \\
x_2 &= -d_2 \cos(\varphi), \\
y_2 &= -d_2 \sin(\varphi) \sin(i).
\end{aligned}$$

[2] Hier hat die Inklination in der Draufsicht (face-on) den Wert $i = 90°$ und in der Kantensicht (edge-on) den Wert $i = 0°$.

Wenn wir schließlich die verschiedenen Leuchtkräfte der beiden Sterne mit der überdeckten Fläche in Relation setzen (Dreisatz), können wir mit den obigen Resultaten die Gesamthelligkeit des Doppelsternsystems berechnen. Man erhält also folgenden

Algorithmus:

1. Berechne die Mittelpunktskoordinaten $(x_j, y_j), j = 1, 2$:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2}\; s\cos(\varphi), \\ y_1 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2}\; s\sin(\varphi)\sin(i), \\ x_2 &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\; s\cos(\varphi), \\ y_2 &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\; s\sin(\varphi)\sin(i). \end{aligned} \tag{1}$$

2. Berechne den Abstand der Mittelpunkte

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \tag{2}$$

$$= s\sqrt{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\sin^2(i)}. \tag{3}$$

3. Fallunterscheidung für die überlappende Fläche F_o

$$F_o = \begin{cases} 0 & \text{für } d \geq r_1 + r_2, \\ \pi(r_1^2 \frac{\alpha}{180^\circ} + r_2^2 \frac{\beta}{180^\circ}) - dr_1 \sin\alpha & \text{für } r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2, \\ \pi r_2^2 & \text{für } d \leq r_1 - r_2. \end{cases} \tag{4}$$

4. Fallunterscheidung für die gesamte Leistung

$$L = \begin{cases} L_2 + L_1(1 - \frac{F_o}{\pi r_1^2}) & \text{für } 0^\circ \leq \varphi < 180^\circ, \\ L_1 + L_2(1 - \frac{F_o}{\pi r_2^2}) & \text{für } 180^\circ \leq \varphi < 360^\circ. \end{cases} \tag{5}$$

Punkt 1 des Algorithmus für die Berechnung der Sternmittelpunkte (x_j, y_j) an der scheinbaren Himmelskugel wird nur für die Darstellung auf einem Monitor benötigt. Möchte man lediglich die Lichtkurve $L = L(\varphi)$ in Abhängigkeit des Positionswinkels φ berechnen, kann man mit Punkt 2 beginnen und die Formel (3)

$$d = s\sqrt{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\sin^2(i)}$$

benutzen. Hierfür kann man einen programmierbaren Taschenrechner einsetzen. Die Fallunterscheidung in Punkt 3 (Vergleich von d gegen $r_1 + r_2 = 2.52$ und $r_1 - r_2 = 0.52$) kann nur auf den wenigsten Taschenrechnern programmiert werden – sie muss also i.a. manuell erfolgen. Die Formeln für die Überlappung lassen sich wieder programmieren, ebenso die Formeln für die Gesamtleistung L in Punkt 4 (wieder nach einer manuellen Fallunterscheidung). Ein Vorschlag könnte das Anlegen einer Arbeitstabelle sein. Ich stelle das exemplarisch für einige Werte von φ vor. Die Inklination und die Trennung werden zu $i = 10^\circ$ und $s = 9R_\odot$ angenommen. Um die in den Taschenrechner einprogrammierte Formel optimal zu nutzen, fülle ich die Arbeitstabelle spaltenweise von links nach rechts. Dabei rechne ich nur mit drei Nachkommastellen. Alle Winkelangaben werden durchgängig in diesem Aufsatz in Grad gemessen.

φ	$d = 9\sqrt{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\sin^2(i)}$ in $R_\odot$	α	β	F_o in $R_\odot^2$	$L/L_\odot$
74	2.900	–	–	0	12.3
76	2.653	–	–	0	12.3
78	2.416	13.307	20.478	0.049	12.224
80	2.193	23.373	37.086	0.267	11.884
82	1.991	29.374	48.209	0.541	11.458

Die mit dem Taschenrechner berechneten Werte für die Gesamtleistung stimmen hier sehr gut mit den exakten Werten überein. Für die Behandlung in der Schule wird der Lehrer im Einzelfall entscheiden wollen ob und wie genau die Berechnungen mit dem Taschenrechner durchgeführt werden sollen. Denkbar wäre dabei eine arbeitsteilige Bewältigung der Tipparbeit wobei verschiedene Wertebereiche an verschiedene Schüler deligiert werden. Weniger arbeitsaufwändig ist natürlich die Benutzung eines Computers, der die Zwischenergebnisse (d, α, β, F_o) intern mit mehr Nachkommastellen abspeichert und die auftretenden Fallunterscheidungen über Kontrollstrukturen selbst abarbeitet.

4 Bedingung für eine Bedeckung

Mit den Methoden der Kurvendiskussion kann man eine notwendige und hinreichende Bedingung für das Auftreten von Bedeckungen entwickeln. Dabei gehen die geometrischen Größen r_1, r_2, s und i ein. Notwendig und hinreichend für das Auftreten von beobachtbaren Bedeckungen ist $d(\varphi) < r_1 + r_2$ für ein φ. Gleichbedeutend hierzu ist $d^2(\varphi) < (r_1 + r_2)^2$ für ein φ. Es gilt $d^2(\varphi) = s^2\left(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\sin^2(i)\right)$. Setzt man $\sin^2(i) = c$ und $f(\varphi) = \cos^2(\varphi) + c\sin^2(\varphi)$ erhält man über die übliche Untersuchung der ersten und zweiten Ableitung von f, dass $d(\varphi)$ für $c \neq 1$ genau an den Stellen $\varphi_{\min} = (2n+1)\cdot 90^\circ,\ n \in \mathbb{Z}$, global minimal wird mit $d(\varphi_{\min}) = s \cdot \sin(i)$. Dieses Resultat sollte nicht überraschen, denn natürlich ist das Abstandsquadrat der scheinbaren Kreismittelpunkte bei ungeradzahligen Vielfachen von 90° minimal – genau dann stehen beide Komponenten aus der Sicht des Beobachters bestmöglich hintereinander. Das bedeutet: man erhält genau dann eine beobachtbare Bedeckung, wenn gilt

$$s \cdot \sin(i) < r_1 + r_2.$$

Literatur

[1] Sterken, C., Jaschek, C.: Light Curves of Variable Stars, Cambridge University Press, Cambridge, 1996